Stochastik

Wiederholung bis Klasse 10 zur optimalen Vorbereitung auf die Kursstufe

allgemeinbildende Gymnasien

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: Mit und ohne GTR.

1. Auflage 2016

Valentin Meier

www.lerntreff-meier.de

September 2016

Inhalt

Vorwort

Dieses Skript dient zur Wiederholung von Stochastik. Es ist geeignet für Schüler allgemeinbildender Gymnasien der Klasse 10 und der Kursstufe in Baden-Württemberg.

Ich habe das Skript selbst geschrieben. Grundlage dafür waren einige Lehrbücher und Lehrpläne sowie ältere Aufgabensammlungen. Dieses Skript selbst bietet allerdings keine Aufgabensammlung.

Solltet Ihr Wünsche oder Anregungen haben, Fehler finden oder Kritik äußern wollen könnt ihr mir jederzeit eine Mail an post@lerntreff-meier.de schreiben.

Das Skript ist nicht für den WTR geeignet. Schüler der aktuellen 10ten Klassen müssen warten bis das Skript entsprechend überarbeitet wird.

Das Skript darf von allen Schülern frei verwendet und verbreitet werden.

Sie finden es auch auf der Seite www.lerntreff-meier.de zum download.

Bewusst weggelassen wurden folgende Themen:

Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen, Schnitt- und Vereinigungsmenge, Vier-Felder-Tafel, Standardabweichung und Varianz, Auslastungsmodell.

Um eine bessere Orientierung zu ermöglichen habe ich einzelne Inhalte farblich hinterlegt. Schüler, die den Merkur Verlag Rinteln kennen, kennen dieses System bereits.

Aufgabenbeispiele sind grau hinterlegt.

Definitionen, Grundlagen und Erklärungen sind rot hinterlegt. **Wichtige Begriffe** sind fett markiert.

Bemerkungen und Hinweise sind blau hinterlegt.

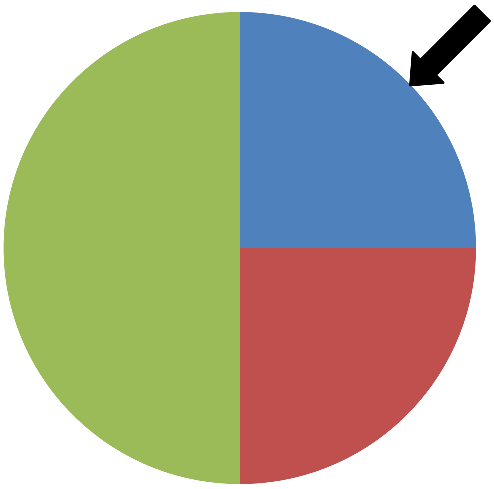
1. Grundlagen

1.1. Wahrscheinlichkeit

Eine einheitliche Definition der Wahrscheinlichkeit gibt es nicht. Wenn man mehrere Lehrbücher vergleicht und parallel dazu im Internet recherchiert findet man mehrere Ansätze, die sich zusammenfassen lassen können.

Mit Wahrscheinlichkeit verbindet man oft **Zufall**. Es geht dabei um Situationen oder Experimente, bei denen man versucht den Ausgang **vorherzusagen**. Meist gibt es mehrere mögliche Ausgänge (**Ergebnisse**) welche eine unterschiedliche Gewissheit (**Sicherheit**) haben.

Ein Ergebnis E_1 kann eine größere Wahrscheinlichkeit als ein anderes Ergebnis E_2 haben. Daher schätzt man die Chance für E_1 höher ein als für E_2.



Das rechts abgebildete Glücksrad wird einmal gedreht. Dabei hängt es vom Zufall ab wo es stehen bleibt. Der Pfeil zeigt an, welche Farbe „gewonnen“ hat.

Die Hälfte des Glücksrades ist grün. Daher beträgt der Anteil der grünen Fläche $\frac{1}{2}$. Prozentual entspräche das 50%. Bei rot und blau beträgt der Anteil jeweils $\frac{1}{4}$ bzw. 25%.

Farbe	grün	rot	blau
Erwarteter Anteil (Bruch)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Erwarteter Anteil (Prozent)	50%	25%	25%

Nun wird das Glücksrad 500-mal gedreht und die Ergebnisse werden notiert. Wie häufig kommt dabei jede Farbe vor? Man kann die Vermutung aufstellen, dass sich die Häufigkeiten entsprechend der einzelnen Anteile verteilen werden. Bei grün könnte man daher annehmen, dass es 250-mal gedreht wird, bei blau 125-mal und bei rot ebenfalls 150-mal. Die beobachteten Häufigkeiten weichen tatsächlich ab.

Farbe	grün	rot	blau
erwartete Häufigkeit	250	125	125
beobachtete Häufigkeit	268	95	137

Die beobachteten Häufigkeiten stimmen recht gut mit den erwarteten Häufigkeiten überein.

Hierzu ein kleines Gedankenspiel: Man geht davon aus, dass man das Spiel unendlich oft spielen könnte. Die beobachteten Häufigkeiten stimmen umso mehr den erwarteten Häufigkeiten überein je öfter man das Glücksrad dreht. Man nennt das das **Gesetz der großen Zahlen**.

Gleichzeitig gibt es aber kein „Gesetz des Ausgleiches". Stell dir dazu einmal vor, es wurde bereits zweimal blau gedreht. Man könnte jetzt vermuten, dass doch grün kommen müsste, immerhin ist das grüne Feld doch doppelt so groß wie das blaue. Diese Vermutung ist allerdings falsch. Es kann bei der dritten Drehung sowohl grün als auch rot als auch blau erdreht werden. Es gibt <u>keine Garantie</u> dafür, dass jetzt grün kommen muss.

1.2. Ergebnis und Ereignis

Bei einem Zufallsexperiment kennt man bereits vorher alle möglichen **Ergebnisse**. Es hängt vom Zufall ab welches Ergebnis eintritt. Man kann alle möglichen Ergebnisse zu einer **Ergebnismenge S** zusammenfassen.

Beim Würfeln ist $S = \{Augenzahl\ 1; Augenzahl\ 2; Augenzahl\ 3; \dots; Augenzahl\ 6\}$

Beim Werfen einer Münze ist $S = \{Wappen; Zahl\}$ oder $\{Kopf; Zahl\}$

Man kann auch viele andere Gegenstände wie Reißnägel, Bierdeckel, Korken oder Legosteine usw. werfen und daraus ein Zufallsexperiment machen.

Betrachtet man beim Würfel nur die Augenzahl 4 dann nennt man das ein **Ereignis**. Dieses Ereignis lautet *„Augenzahl ist vier".* Ein Ereignis ist ein Teil der Ergebnismenge. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses wird auch mit $P(Ereignis)$ dargestellt.

In diesem Fall besteht die Ergebnismenge aus 6 Ereignissen. Das Ergebnis *„4"* trifft auf die Aussage zu. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses beträgt daher $\frac{1}{6}$. Oder Kurz: $P(Augenzahl\ 4) = \frac{1}{6}$

Zufallsexperimente, bei denen alle Wahrscheinlichkeiten gleich groß sind nennt man auch **Laplace-Experimente**.

Ein Ereignis kann auch aus mehreren Ergebnissen bestehen, zum Beispiel bei dem Ereignis *„Augenzahl ist kleiner als 4"*. Zu diesem Ereignis gehören 3 Ergebnisse: $\{1; 2; 3\}$. Ihre Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{3}{6}$. Oder kurz: $P(Augenzahl < 4) = \frac{3}{6}$.

Wenn ein Ereignis *alle möglichen Ergebnisse* der Ergebnismenge enthält nennt man es ein **sicheres Ereignis**. Ihre Wahrscheinlichkeit beträgt immer 1. Zum Beispiel: „Augenzahl höchstens 6“. Dieses Ereignis wird immer eintreten.

Wenn ein Ereignis *kein Ergebnis* der Ergebnismenge enthält nennt man es ein **unmögliches Ereignis**. Ihre Wahrscheinlichkeit beträgt immer 0. Zum Beispiel: *„Augenzahl größer als 6“*. Dieses Ereignis kann nie eintreten.

Zu jedem Ereignis gibt es immer ein **Gegenereignis**. Siehe dazu aber 1.6.6. Ereignis und Gegenereignis.

1.3. Absolute und relative Häufigkeiten

Bei Zufallsexperimenten kann man die **Anzahl** der einzelnen Ergebnisse zählen und diese in Strichlisten oder Tabellen aufschreiben. Man nennt diese Anzahl eine **absolute Häufigkeit**.

Außerdem bestimmt man, welchen **Anteil** die absolute Häufigkeit **an der Gesamtmenge** der Durchführungen hat. Man nennt diesen Anteil **relative Häufigkeit**. (*relativ* bedeutet: „bezogen auf“)

Absolute Häufigkeit $\xrightarrow{\text{Bezug zur Gesamtmenge}}$ relative Häufigkeit

Schauen wir uns nochmal das Glücksrad auf Seite 4 an. Daraus ergibt sich folgende Tabelle.

Ergebnis	Grün	Rot	blau
Absolute Häufigkeit	268	95	137
Relative Häufigkeit	0,536	0,190	0,274

Bei 268 von 500 Drehungen zeigte der Zeiger auf ein grünes Feld. Das entspricht einer relativen Häufigkeit von 0,536 = 53,6%. Bei 95 von 500 Drehungen zeigte er auf ein rotes Feld, das wiederum entspricht einer relativen Häufigkeit von 0,190 = 19%. Bei blau waren es 137 von 500 Drehungen, das entspricht einer relativen Häufigkeit von 0,274 = 27,4%. Auch hier gilt wieder: Je häufiger man dreht, desto genauer stimmen die relativen Häufigkeiten mit den erwarteten Anteilen überein.

Relative Häufigkeiten kann man als Bruch, als Kommazahl oder in Prozentschreibweise angeben.

1.4. Erwartungswert

Die erwartete Häufigkeit nennt man auch Erwartungswert.

Der **Erwartungswert** gibt eine Vermutung an, wie oft ein Ereignis bei einer bestimmten Menge an Durchführungen eintritt.

Für den Erwartungswert gilt: $\boldsymbol{E = n \cdot p}$

Wenn wir das Glücksrad 1800-mal drehen würden, was würde passieren? Wie oft würde beispielsweise grün erscheinen? Für $n = 1800$ Drehungen und $p = \frac{1}{2}$ ergibt sich dann ein Erwartungswert mit $E = n \cdot p = 1800 \cdot \frac{1}{2} = 900$. Man kann davon ausgehen, dass ca. 900-mal ein grünes Feld „erdreht" wird.

Den Erwartungswert kann man auch als μ (gesprochen: „mü") bezeichnen.

1.5. Durchschnitt und Arithmetisches Mittel

„Durchschnitt" kennt jeder Schüler. Lehrer berechnen nach der Korrektur der Klassenarbeit immer den Durchschnitt aller Noten um herauszufinden, wie gut oder wie schlecht die Klasse bei einer Klassenarbeit oder bei einer Prüfung abgeschnitten hat. Was viele aber nicht wissen: Das „arithmetische Mittel" ist nichts anderes als ein Synonym für „Durchschnitt".

Arithmetisches Mittel ist ein Synonym für Durchschnitt.

Wie berechnet man das arithmetische Mittel bzw. den Durchschnitt? Schauen wir uns dazu die Notenverteilung einer 10ten Klasse nach einer Klassenarbeit an.

Note	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigk.	3	6	8	5	2	1

Wenn man alle absolute Häufigkeiten addiert erhält man die Gesamtzahl der Schüler. Insgesamt besuchen 25 Schüler diese Klasse.

Man berechnet den Durchschnitt ⌀ in dem man alle Werte miteinander addiert und das Ergebnis durch die Gesamtmenge dividiert.

$$\varnothing = \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{25} = \frac{75}{25} = 3$$

Die Klassenarbeit hatte einen Durchschnitt von 3.

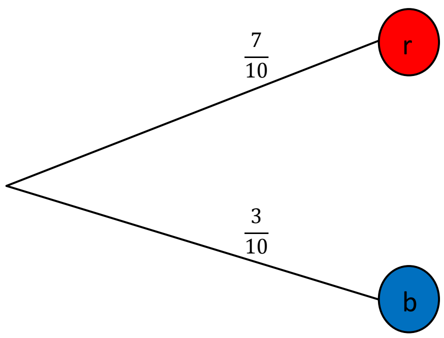
1.6. Zufallsexperimente, Baumdiagramme und Pfadregeln

1.6.1. Einstufiges Zufallsexperiment

Beispiel 1

In einer Urne befinden sich 7 rote (r) und 3 blaue (b) Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen. Zeichne ein Baumdiagramm und gib die einzelnen Wahrscheinlichkeiten an.

Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen beträgt $\frac{7}{10}$ oder 0,7. Kurz: $P(r) = 0,7$

Die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu ziehen beträgt $\frac{3}{10}$ oder 0,3. Kurz: $P(b) = 0,3$

1.6.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten unterscheidet man zwei Fälle: **Versuche mit zurücklegen** und **Versuche ohne zurücklegen**.

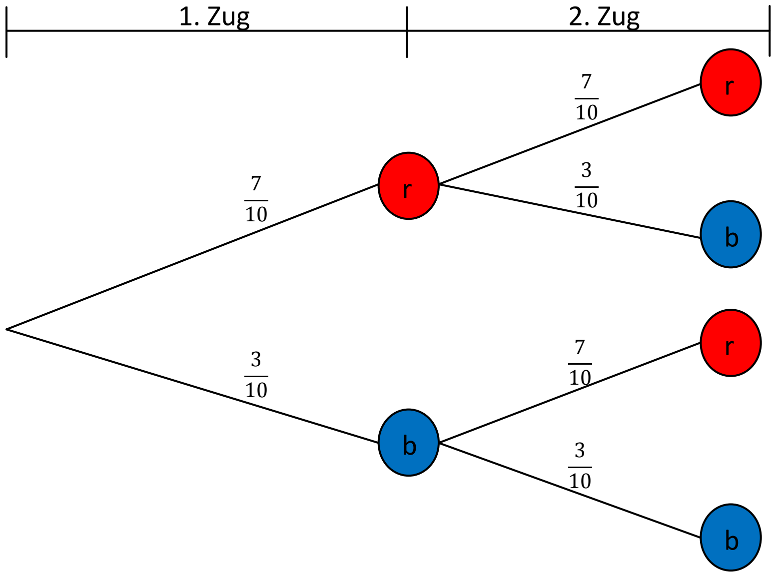
Bei einem Versuch mit zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten nicht. Bei einem Versuch ohne zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten.

1.6.3. Zweistufiges Zufallsexperiment mit zurücklegen

Beispiel 2

In einer Urne befinden sich 7 rote (r) und 3 blaue (b) Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit zurücklegen gezogen. Zeichne ein Baumdiagramm und gib die einzelnen Wahrscheinlichkeiten an.

Baumdiagramm:



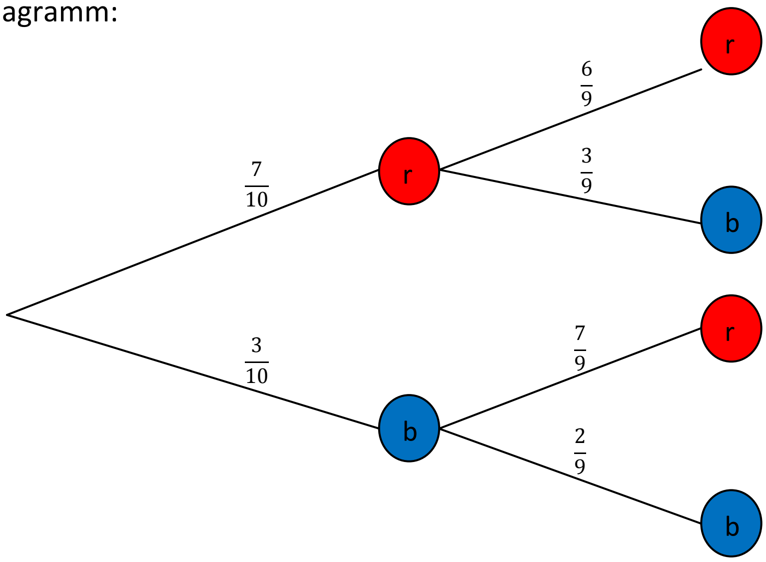
Wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Äste addiert, die den gleichen Startpunkt haben, dann ist das Ergebnis immer 1. Ansonsten wurde das Baumdiagramm falsch beschriftet.

1.6.4. Zweistufiges Zufallsexperiment ohne zurücklegen.

Beispiel 3

In einer Urne befinden sich 7 rote (r) und 3 blaue (b) Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne zurücklegen gezogen. Die gezogene Kugel bleibt auf dem Tisch liegen. Zeichne ein Baumdiagramm und gib die einzelnen Wahrscheinlichkeiten an.

Baumdiagramm:



Bei Versuchen ohne zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten in jedem weiteren Zug.

Wenn bereits eine rote Kugel gezogen wurde beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine zweite rote Kugel $\frac{6}{9}$. Die erste rote Kugel bleibt auf dem Tisch liegen und wird nicht wieder zurück gelegt, daher befinden sich insgesamt nur noch 9 Kugeln in der Urne, wovon 6 rot sind.

Wenn bereits eine rote Kugel gezogen wurde beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel $\frac{3}{9}$. Die Anzahl der blauen Kugeln hat sich durch den ersten Zug nicht verändert. Es gibt immer noch 3 blaue Kugeln. Die Gesamtzahl hat sich aber auf 9 verringert da eine rote Kugel auf dem Tisch liegt und sich somit nur noch 9 Kugeln in der Urne befinden.

Man kann sich selbst kontrollieren ob man die Wahrscheinlichkeiten richtig in das Baumdiagramm eingetragen hat. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Äste zusammenzählt, die den gleichen Anfang haben, dann muss das Ergebnis immer 1 sein.

Äste links: $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1.$ Äste rechts oben: $\frac{6}{9} + \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1$

Äste rechts unten: $\frac{7}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$

1.6.5. Pfadregeln

Erste Pfadregel: Wenn man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen möchte so **multipliziert** man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Äste.

Beispiel 4

Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei rote Kugeln?

Mit zurücklegen: $P(rr) = P(r) \cdot P(r) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100} = 49\%$

Ohne Zurücklegen: $P(rr) = P(r) \cdot P(r) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} \approx 46{,}7\%$

Statt $P(rr)$ kann man auch $P("rr")$ oder $P(zweimal\, rot)$ schreiben. Man kann auch eine Aussage (A) definieren:

A: man zieht zweimal eine rote Kugel $\rightarrow P(A) = ..$

Diese Schreibweise empfiehlt sich dann wenn man mehrere Teilaufgaben lösen muss.

Zweite Pfadregel: Wenn ein Ereignis aus mehreren einzelnen Ereignissen besteht so **addiert** man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse miteinander.

Beispiel 5

Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens eine blaue Kugel?

Zunächst überlegt man sich: Welche einzelnen Ereignisse gehören zu dieser Aussage?

Mindestens bedeutet, dass auch beide Kugeln blau sein dürfen.

B: Mindestens eine Kugel ist blau.

Zu dieser Aussage (B) gehören: rb, br, bb

Also gilt: $P(\text{mindestens eine Kugel blau}) = P(B) = P(rb) + P(br) + P(bb)$

Man rechnet die einzelnen Wahrscheinlichkeiten durch Multiplikation (**1. Pfadregel**) aus und addiert die einzelnen Wahrscheinlichkeiten miteinander (**2. Pfadregel**) um die Gesamtwahrscheinlichkeit für diese Aussage zu bestimmen.

Mit zurücklegen

Zunächst einzeln:

$$P(rb) = P(r) \cdot P(b) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

$$P(br) = P(b) \cdot P(r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$$

$$P(bb) = P(b) \cdot P(b) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Dann addieren:

$$P(B) = P(rb) + P(br) + P(bb)$$

$$P(B) = \frac{21}{100} + \frac{21}{100} + \frac{9}{100} = \frac{51}{100} = 51\%$$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens eine blaue Kugel zu ziehen beträgt 51%.

Ohne zurücklegen

Zunächst einzeln:

$$P(rb) = P(r) \cdot P(b) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(br) = P(b) \cdot P(r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(bb) = P(b) \cdot P(b) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

Dann addieren:

$$P(B) = P(rb) + P(br) + P(bb)$$

$$P(B) = \frac{21}{90} + \frac{21}{90} + \frac{6}{90} = \frac{48}{90} \approx 53{,}3\%$$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens eine blaue Kugel zu ziehen beträgt 53,3%.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Baumdiagramms beträgt immer 1.

1.6.6. Ereignis und Gegenereignis

Jedes **Ereignis** $\boldsymbol{A}$ besitzt ein **Gegenereignis** $\bar{\boldsymbol{A}}$ (sprich: „A Strich"). Alle Ergebnisse, die nicht zu A gehören, gehören zu $\bar{A}$.

Beispiel 6

Gegeben sei die Ergebnismenge $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Bestimme zu jedem Ereignis sein Gegenereignis und bestimme die zugehörigen Elemente.

Ereignis	**Gegenereignis**
A: Die Zahl ist **gerade**. $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ $P(A) = \frac{6}{11}$ Bemerkung: 0 ist eine gerade Zahl.	$\bar{A}$: Die Zahl ist **ungerade**. $\bar{A} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ $P(\bar{A}) = \frac{5}{11}$
A: Die Zahl ist **größer als** 6. $A = \{7; 8; 9; 10\}$ $P(A) = \frac{4}{11}$	$\bar{A}$: Die Zahl ist **höchstens / maximal** 6. $\bar{A} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $P(\bar{A}) = \frac{7}{11}$
A: Die Zahl ist **mindestens** 1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ $P(A) = \frac{10}{11}$	$\bar{A}$: Die Zahl ist **kleiner als** 1. $\bar{A} = \{0\}$ $P(\bar{A}) = \frac{1}{11}$

Man kann diese Tabelle natürlich auch von rechts nach links lesen. Wenn das Ereignis „ungerade" ist dann ist das Gegenereignis dazu „gerade" usw.

Achte auf **Signalwörter**. Diese stehen in der Aufgabenstellung und müssen richtig interpretiert werden.

Signalwörter sind: *mindestens, höchstens, mehr als, weniger als, maximal, bis zu, alle, keine, zwischen, …*

Wenn man die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses und des Gegenereignisses addiert kommt immer 1 raus. Wenn man die beiden Mengen zusammenfasst entsteht wieder die Ergebnismenge E.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ oder auch $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Man kann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses auch über das Gegenereignis bestimmen.

Schauen wir uns dazu nochmal die Aussage B an.

B: **Mindestens eine** Kugel ist blau. $B = \{rb, br, bb\}$

→3 Rechnungen + Addition

$\bar{B}$: **Weniger als eine / keine** Kugel ist blau $\bar{B} = \{rr\}$

→1 Rechnung + Gegenereignis

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(rr)$

<u>Mit zurücklegen</u>	<u>Ohne zurücklegen</u>
$P(B) = 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$	$P(B) = 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 1 - \frac{42}{90} = \frac{48}{90}$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind mit den vorherigen identisch. Der Aufwand ist aber geringer.

Das Gegenereignis empfiehlt sich immer dann, wenn man dadurch weniger Rechnungen machen muss.

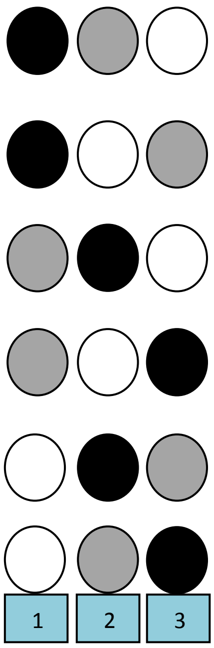
2. Kombinatorik

2.1. Fakultät *n!*

Beispiel 7

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es eine schwarze, eine graue und eine weiße Kugel auf 3 Plätze zu verteilen?

Folgende Möglichkeiten lassen sich bilden:



schwarz, grau, weiß

schwarz, weiß, grau

grau, schwarz, weiß

grau, weiß, schwarz

weiß, schwarz, grau

Weiß, grau, schwarz

Insgesamt gibt es **6 verschiedene Möglichkeiten**, diese 3 Kugeln auf 3 Plätze zu verteilen.

Für 3 Kugeln gibt es $\mathbf{3}!$ (sprich: drei Fakultät) verschiedene Möglichkeiten sie anzuordnen.

$\mathbf{3}! = \mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} = 6$ verschiedene Möglichkeiten.

Für 4 Kugeln wären es 4! Verschiedene Möglichkeiten:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Möglichkeiten.

Für 5 Kugeln wären es 5! Verschiedene Möglichkeiten:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Möglichkeiten.

Sonderregelung: $0! = 1$

Mit dem GTR: !

MATH → PRB → 4: !

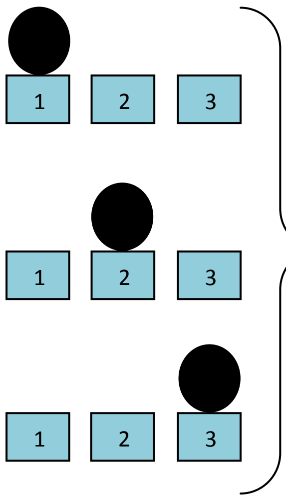
2.2. Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ $\rightarrow$ sprich: „n über k“

Beispiel 8

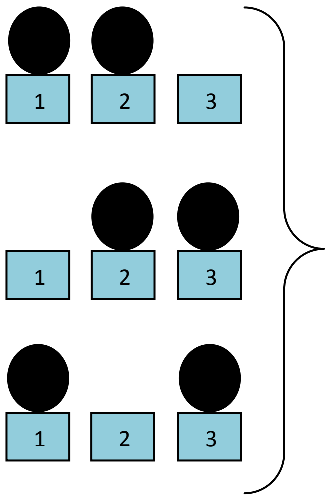
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es eine bzw. zwei schwarze Kugeln auf 3 Plätze zu verteilen?

<u>Eine schwarze Kugel</u>



3 verschiedene Möglichkeiten

<u>Zwei schwarze Kugeln</u>



3 verschiedene Möglichkeiten

Für den **Binomialkoeffizienten** gilt:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

$n =$ Anzahl der Kugeln insgesamt, $k =$ Anzahl der Farbigen Kugeln

Da es 3 Plätze gibt ist $n = 3$

<u>Eine schwarze Kugel $k = 1$</u>

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$\binom{3}{1} = 3$ Möglichkeiten

<u>Zwei schwarze Kugeln $k = 2$</u>

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten

Mit dem GTR: $\boldsymbol{nCr}$

MATH → PRB → 3: nCr

$\binom{3}{1} = 3\,\boldsymbol{nCr}\,1 = 3$ $\binom{10}{3} = \mathbf{10}\,\boldsymbol{nCr}\,\mathbf{3} = 120$ $\binom{8}{4} = 8\,\boldsymbol{nCr}\,4 = 70$

2.2.1. Pascal'sches Dreieck

$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

<u>Anleitung linkes Dreieck:</u>

Das Dreieck beginnt mit $\binom{0}{0}$. Mit jeder weiteren Zeile erhöht sich n um 1. k beginnt ganz links immer mit 0 und es wird so lange durchgezählt, bis k und n gleich sind. Mit jeder weiteren Zeile kommt dadurch auch eine weitere Klammer dazu.

<u>Anleitung rechtes Dreieck:</u>

Die äußersten Zahlen sind immer 1. Wenn man die inneren Zahlen bestimmen möchte addiert man einfach die beiden überliegenden Zahlen. Zum Beispiel: $1 + 1 = 2$ oder $3 + 1 = 4$.

Binomialkoeffizienten und Zahlen, welche an der gleichen Stelle stehen, haben das gleiche Ergebnis (siehe farbige Markierung).

Aus dem Pascal'schen Dreieck lassen sich <u>4 Regeln</u> ableiten, die man direkt bestimmen kann.

1. $\binom{0}{0} = 1;\ \binom{1}{0} = 1;\ \binom{2}{0} = 1; \ldots \qquad \rightarrow \binom{n}{0} = 1$
   Wenn unten eine 0 steht ist das Ergebnis immer 1.
2. $\binom{0}{0} = 1;\ \binom{1}{1} = 1;\ \binom{2}{2} = 1; \ldots \qquad \rightarrow \binom{n}{n} = 1$
   Wenn beide Zahlen gleich sind ist das Ergebnis ebenfalls immer 1.
3. $\binom{2}{1} = 2;\ \binom{3}{1} = 3;\ \binom{4}{1} = 4; \ldots \qquad \rightarrow \binom{n}{1} = n$
   Wenn unten eine 1 steht ist das Ergebnis immer n.
4. $\binom{2}{1} = 2;\ \binom{3}{2} = 3;\ \binom{4}{3} = 4; \ldots \qquad \rightarrow \binom{n}{n-1} = n$
   Wenn unten eine Zahl steht, die 1 kleiner als n ist, dann ist das Ergebnis n.

3. Binomialverteilung

3.1. Das Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment ist ein **Bernoulli-Experiment** wenn…

… **nur zwei mögliche Ereignisse** eintreten können. Zum Beispiel *„Erfolg“ – „Misserfolg“* oder *„Treffer“ – „Niete“*.

…sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern**.

Daher sind Bernoulli-Experimente immer Experimente „mit zurücklegen“, da sich bei „ohne zurücklegen“ die Wahrscheinlichkeiten ändern würden.

Mögliche Bernoulli-Experimente sind:

- Münzwurf: „Kopf“ und „Zahl“
- Würfeln: „6“ und „keine 6“
- Karten ziehen (mit zurücklegen): „König“ oder „kein König“
- usw.

3.2. Die Bernoulli-Formel

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}}$$

Legende:

X	Zufallsvariable
n	Anzahl der Versuche bzw. Anzahl der Durchführungen
k	Anzahl der *„Treffer“* bzw. *„Erfolge“*
$n-k$	Anzahl der *„Nieten“* bzw. *„Misserfolge“*
p	Erfolgswahrscheinlichkeit
$1-p$	Misserfolgswahrscheinlichkeit (Gegenereignis)

3.3. Die Binomialverteilung $P(X=k)$

Beispiel 9

Man würfelt 34-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man **genau 10-mal eine 3**?

Für $n = 34$ und $p = \frac{1}{6}$ (Wahrscheinlichkeit beim Würfeln eine „3" zu bekommen" und $k = 10$ ergibt sich:

$$P(X=10) = \binom{34}{10} \cdot (\frac{1}{6})^{10} \cdot (1-\frac{1}{6})^{34-10}$$

$$P(X=10) = \binom{34}{10} \cdot (\frac{1}{6})^{10} \cdot (\frac{4}{6})^{24}$$

$$P(X=10) = 0{,}0273 = 2{,}73\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 34 Würfen genau 10-mal eine 3 bekommt, beträgt 2,73%.

Beispiel 10

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man **genau 10-mal eine 2 oder eine 3**?

Die Wahrscheinlichkeit für „2 oder 3" beträgt $\frac{2}{6}$. n und k bleiben gleich.

$$P(X=10) = \binom{34}{10} \cdot (\frac{2}{6})^{10} \cdot (1-\frac{2}{6})^{34-10}$$

$$P(X=10) = \binom{34}{10} \cdot (\frac{2}{6})^{10} \cdot (\frac{4}{6})^{24}$$

$$P(X=10) = 0{,}1319 = 13{,}19\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 34 Würfen genau 10-mal eine 2 oder eine 3 bekommt, beträgt 13,19%.

Der GTR kennt dafür den Befehl $binom\boldsymbol{p}df$. Siehe dazu 4. Binomialverteilung mit dem GTR.

3.4. Die kumulierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$

„kumuliert“ = „aufsummiert“ oder „aufaddiert“

Beispiel 11

Man würfelt 10-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man dabei **höchstens 3-mal eine 6**?

„Höchstens“ bedeutet auch „bis zu“. Man kann 0-mal, 1-mal, 2-mal oder 3-mal eine 6 würfeln, aber auf keinen Fall mehr als 3-mal.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Man bestimmt zuerst alle einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Die einzelnen Ergebnisse werden dann addiert. Mit $n = 10$ und $k = \frac{1}{6}$ ergeben sich dann folgende Rechnungen:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (\frac{5}{6})^{10} = 0{,}1615$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot (\frac{1}{6})^1 \cdot (\frac{5}{6})^9 = 0{,}3230$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^8 = 0{,}2907$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^7 = 0{,}0543$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}1615 + 0{,}3230 + 0{,}2907 + 0{,}0543$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}9303 \approx 93\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen höchstens 3-mal eine 6 zu würfeln, beträgt 93%.

Allgemein gilt für die **kumulierte Binomialverteilung**:

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$$

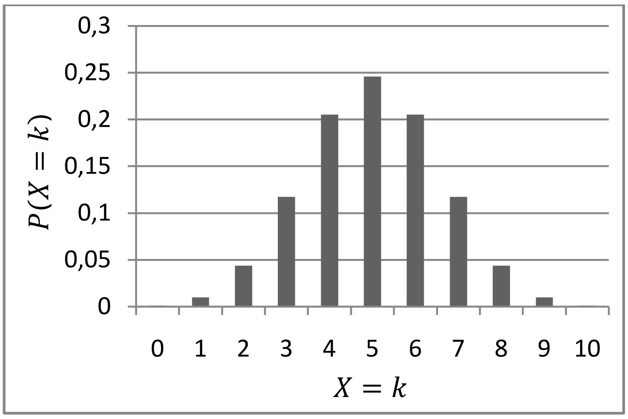
Der GTR kennt dafür den Befehl $binom\boldsymbol{c}df$. Siehe dazu 4. Binomialverteilung mit dem GTR.

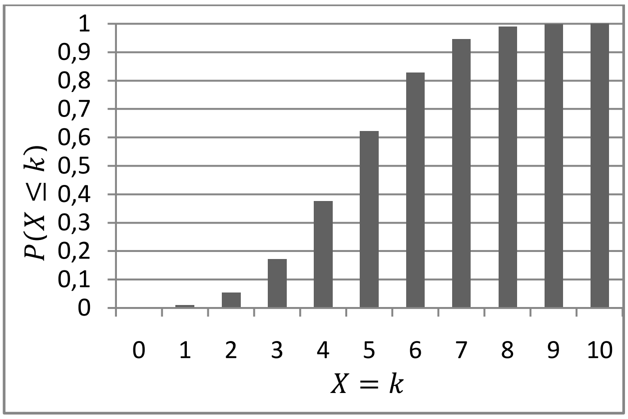
3.5. Grafische Betrachtung der Binomialverteilung

Ein Zufallsexperiment ist mit n und p binomialverteilt. Man kann auch $B_{n,p}$ schreiben.

Beispiel 12

Ein Zufallsexperiment ist mit $n = 10$ und $p = 0{,}5$ binomialverteilt: $B_{10,0.5}$





Man kann aus dem Schaubild näherungsweise einzelne Wahrscheinlichkeiten ablesen:

$P(X = 3) \approx 0{,}11$

$P(X = 5) \approx 0{,}245$

$P(X = 8) \approx 0{,}04$

Zählt man oben alle Balken zusammen ist das Ergebnis immer 1.

Schaubild oben: nicht kumuliert

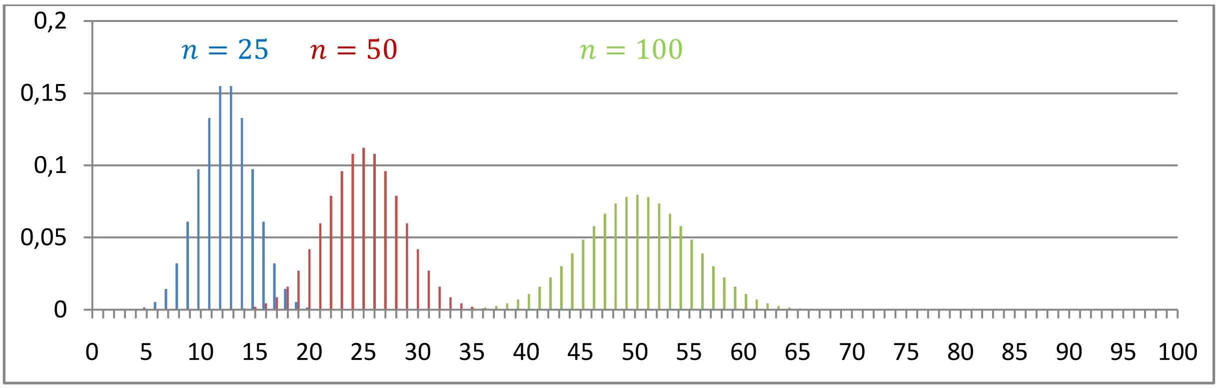
Schaubild unten: kumuliert

Wenn man n und p bei einer Binomialverteilung ändert dann ändern sich auch deren Schaubilder. Daher stellt sich folgende Frage:

Welchen Einfluss haben die Parameter n und p auf die Schaubilder der Binomialverteilung?

3.5.1. Einfluss des Parameters n

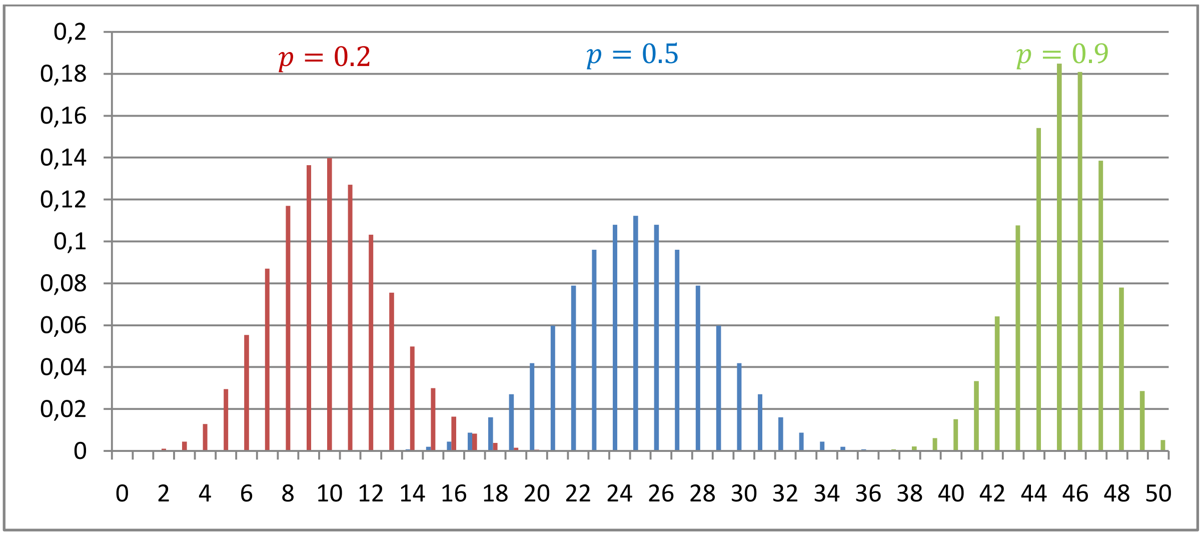
Um den Einfluss von n zu bestimmen wird $p = 0{,}5$ konstant gehalten und für n setzen wir verschiedene Werte ein, zum Beispiel $25, 50, 100$.



Je größer n wird, desto „rundlicher“ wirkt das Schaubild. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden aber kleiner.

3.5.2. Einfluss des Parameters k

Um den Einfluss von k zu bestimmen wird $n = 10$ konstant gehalten und für p setzen wir verschiedene Werte ein, zum Beispiel $0.2; 0.5; 0.9$.



Je kleiner p wird, desto weiter schiebt sich das Schaubild nach links. Je größer p wird, desto weiter schiebt sich das Schaubild nach rechts. Jedes einzelne Schaubild nennt man eine **Glockenkurve**. Für $p = 0.5$ ist die Glockenkurve sogar symmetrisch. Die Symmetrieeigenschaft nimmt umso mehr ab je weiter sich p von 0.5 entfernt.

Jede Glockenkurve besitzt einen Hochpunkt. Diesen Hochpunkt nennt man auch **Erwartungswert** (vgl. 1.4. Erwartungswert).

Für $p = 0{,}2$ beträgt der Erwartungswert $E =$ ▯ $= 50 \cdot 0{,}2 = 10$. Die Wahrscheinlichkeit $P(X =$ ▯$)$ ist die größte Wahrscheinlichkeit, die das Schaubild erreichen kann. Daher hat das rote Schaubild bei $X = 10$ seinen Hochpunkt. Die Wahrscheinlichkeiten nehmen um diesen Hochpunkt herum ab. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten beträgt immer 1.

3.6. Aufgabentypen zur Binomialverteilung, Ansätze und Umformung

Beispiel 13

Eine Mutter kauft 10 Ü-Eier für ihre Kinder. In jedem siebten Ü-Ei befindet sich ein Dino. ($n = 10$ und $p = \frac{1}{7}$)

Bei dieser Erklärung geht es zunächst nicht darum die Wahrscheinlichkeiten konkret zu berechnen, sondern nur um einen richtigen Ansatz zu finden. Der GTR kennt nur Befehle für $P(X = k)$ und $P(X \leq k)$. Alle anderen Fälle muss man umformen. Wie das funktioniert siehst du in den folgenden Tabellen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Kinder…

Aufgabenstellung	**Ansatz**		
… **genau** 3 Dinos?	$\boldsymbol{P(X = 3)}$ $\{3\}$		
…**höchstens** 4 Dinos?	$\boldsymbol{P(X \leq 4)}$ $\{1,2,3,4\}$		
…**weniger als** 3 Dinos?	$\boldsymbol{P(X} < 3\boldsymbol{)}$ $\{0,1,2\}$	$\rightarrow$	Durchzählen bis zur 2. $P(X \leq 2)$ $\downarrow$ $\boldsymbol{P(X} < 3\boldsymbol{)} = \boldsymbol{P(X \leq 2)}$

...**mindestens** 2 Dinos?	$P(X \geq 2)$ $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ Ereignis	$\rightarrow$	$P(X \leq 1)$ $\{0,1\}$ Gegenereignis $\downarrow$ $\boldsymbol{P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)}$

...**mehr als** 5 Dinos?	$P(X > 5)$ $\{6,7,8,9,10\}$ Ereignis	$\rightarrow$	$P(X \leq 5)$ $\{0,1,2,3,4,5\}$ Gegenereignis $\downarrow$ $\boldsymbol{P(X >} 5) = \boldsymbol{1 - P(X \leq 5)}$

Bei *„mindestens"* und *„mehr als"* benutzt man immer die Umrechnung über das Gegenereignis.

...**mindestens 4 aber höchstens 6** Dinos?	$P(4 \leq X \leq 6)$ $\{4,5,6\}$	$\rightarrow$	$P(X \leq 6)$ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ Durchzählen bis 6. $\downarrow$
	$\boldsymbol{P(4 \leq X \leq 6)}$ $= \boldsymbol{P(X \leq 6) - P(X \leq 3)}$	$\leftarrow$	$P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$ $\{\cancel{0,1,2,3,}4,5,6\}$ Abziehen bis 3.

...**mehr als 2, aber weniger als 6** Dinos?	$P(2 < X < 6)$ $\{3,4,5\}$	$\rightarrow$	$P(3 \leq X \leq 5\}$ $\{3,4,5\}$ Mindestens 3 aber höchstens 5. $\downarrow$
	$P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$ $\{\cancel{0,1,2,}3,4,5\}$ Abziehen bis 2. $\downarrow$ $\boldsymbol{P(2} < X < 6)$ $= \boldsymbol{P(X \leq 5) - P(X \leq 2)}$	$\leftarrow$	$P(X \leq 5)$ $\{0,1,2,3,4,5\}$ Durchzählen bis 5.

4. Binomialverteilung mit dem GTR

Mit GTR TI-82 Stats

$$binom\mathbf{p}d\!f(n,p,k)$$

$$binom\mathbf{c}d\!f(n,p,k)$$

2nd → VARS → 0: binompdf(

↘ A: binomcdf(

Merke: „**N**euen **P**orsche **k**aufen“ → $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})$

Zur Bestimmung der…

- Wahrscheinlichkeit P
- Kettenlänge n
- Trefferwahrscheinlichkeit p

Legende:

X: Zufallsvariable

n: Anzahl der Versuche, Kettenlänge, Gesamtzahl

k: Trefferwahrscheinlichkeit / Erfolgswahrscheinlichkeit

Beide Befehle erfordern bei der Eingabe für n und k natürliche Zahlen ($n \geq 1$ und $k \geq 0$) und für p reelle Zahlen zwischen 0 und 1.

Falls man die GTR-Variable X für n oder k verwendet um n oder k zu bestimmen verwendet man den Befehl $round(X,0)$. Die GTR-Variable wird auf null Stellen gerundet, sonst zeichnet der GTR die Funktion nicht richtig im GRAPH-Menu.

Für den Befehl $round($: VARS → NUM → 2: round(

4.1. Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Bestimmte Trefferzahl $\boldsymbol{k}$	**Bereich von Trefferzahlen, z.B. $\leq \boldsymbol{k}$**
Formel von Bernoulli: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ **GTR:** $binompdf(n,p,k)$	$P(x\leq k)=P(x=1)+\ldots+P(x=k)$ summierte / kumulierte Wahrscheinlichkeit **GTR:** $binom\mathbf{c}df(n,p,k)$ Vgl. Umformung

Der GTR kann mit dem Befehl $binomcdf$ aufaddieren, beginnend bei 0, endend bei k. Er summiert nur linksseitig. Ist eine rechtsseitige Aufsummierung erforderlich muss man vorher umformen.

Beispiel 14

In jedem siebten Ü-Ei befindet sich ein Dino ($p = (\frac{1}{7})$). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von 10 Ü-Eiern a.) **genau ein** Dino b.) **mindestens 3** Dinos hat.

a. $P(X = 1)$ **GTR**: $binom\boldsymbol{p}df(10{,}1/7{,}1) \approx 0{,}36 = 36\%$
b. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ **GTR**: $1 - binom\boldsymbol{c}df(10{,}1/7{,}2) \approx 0{,}16 = 16\%$

4.2. Bestimmung der Kettenlänge $\boldsymbol{n}$

Beispiel 15

Wie viele Ü-Eier müssen gekauft werden, damit man mit **mindestens 90%**-iger Wahrscheinlichkeit **mindestens 5** Dinos hat?

Man nennt diesen **Aufgabentyp** auch: *„Wie oft muss man … tun damit … passiert?“*

Das ergibt folgenden Ansatz:

$P(X \geq 5) \geq 0{,}9$

$1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}9 \qquad | - 1 \,|\cdot (-1)$

$P(X \leq 4) < 0{,}1$

Daraus ergeben sich **verschiedene Lösungswege**:

1. Durch Probieren

Für die Ungleichung $1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}9$ benutzt man den GTR-Befehl $binomcdf$.

Man erhöht die Anzahl der Versuche bis erstmals 90% überschritten werden.

$1 - binomcdf(\mathbf{20}, 1/7{,}4) \approx 0{,}1465$

$1 - binomcdf(\mathbf{40}, 1/7{,}4) \approx 0{,}6943$

$1 - binomcdf(\mathbf{60}, 1/7{,}4) \approx 0{,}9428$ (zu groß, jetzt den genauen Übergang suchen!)

$1 - binomcdf(\mathbf{53}, 1/7, 4) \approx 0{,}8917$

$1 - binomcdf(\mathbf{54}, 1/7, 4) \approx 0{,}9009$

Für die richtige Dokumentation im Heft, in den Klausuren und im Abitur nur die wichtigen Werte angeben, die die Überschreitung beschreiben.

Mit GTR: $n = 53$ $P(X \geq 4) \approx 0{,}8917$

$n = 54$ $P(X \geq 4) \approx 0{,}9009$

Für $n = 54$ erstmals $> 90\%$. Man muss mindestens 54 Ü-Eier kaufen.

2. Durch Wertetabelle und ablesen

Funktion in y-Editor eingeben: $Y1 = 1 - binomcdf(X, 1/7, 4)$

$TblStart = 0$; $\Delta TBL = 1$

Man kann ΔTBL zu Beginn auch größer wählen um sich so z.B. in 10-er Schritten dem Ergebnis anzunähern. Das geht schneller, vor allem wenn das Ergebnis einen großen Wert annehmen könnte. Später muss man ΔTBL aber wieder verkleinern um das genaue Ergebnis zu bestimmen. $TblStart$ kann man dann vergrößern um so schneller ab das Ergebnis zu kommen.

X	Y_1
...	...
50	0.8598
51	0.8712
52	0.8818
53	0.8917
54	**0.9008**
55	0.9093

Beachte:

Wenn man den Graphen zeichnen lassen möchte muss X gerundet werden. Siehe dazu 3.

3. Gezielte Bestimmung durch Schnitt von Graphen

Funktionen in y-Editor eingeben: $Y1 = 1 - binomcdf(\boldsymbol{round}(\boldsymbol{X}, \mathbf{0}), 1/7, 4)$

$Y2 = 0.9$

WINDOW einstellen: $x_{min} = 0$, $x_{max} = 100$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 1$

Bemerkung: y-Werte sind Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1. Da man bei manchen Aufgaben nicht weiß wie groß X wirklich sein könnte muss man x_{max} „raten", daher kann man einen größeren Wert einsetzen und schauen was passiert. Lässt sich kein Schnittpunkt erkennen vergrößert man x_{max}.

Intersect liefert $x = 53{,}5 \;\rightarrow x = 54$

4.3. Bestimmung der Trefferwahrscheinlichkeit p

Beispiel 16

Man möchte die Trefferwahrscheinlichkeit so ändern, dass ein Kunde beim Kauf von 10 Ü-Eiern mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Dinos hat.

p wird gesucht. Bei $n = 10$ ergibt sich der Ansatz $P(X \geq 2) \geq 0{,}9$ bzw. $1 - P(X \leq 1) \geq 0{,}9$.

Dabei kann man wieder die gleichen Lösungsansätze benutzen:

1. **Durch Probieren**

Man erhöht so lange p bis erstmals 90% überschritten werden.

$1 - binomcdf(10, \mathbf{0.2}, 1) \approx 0{,}624$

$1 - binomcdf(10, \mathbf{0.4}, 1) \approx 0{,}954$ (zu groß, jetzt den genauen Übergang suchen!)

$1 - binomcdf(10, \mathbf{0.33}, 1) \approx 0{,}892$

$1 - binomcdf(10, \mathbf{0.34}, 1) \approx 0{,}904$

Für die richtige Dokumentation wieder nur die wichtigen Werte angeben.

$p = 33\%$: $P(X \geq 2) \approx 0{,}892$

$p = 34\%$: $P(X \geq 2) \approx 0{,}904$

Wenn man mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit in 10-Ü-Eiern mindestens 2 Dinos finden möchte ist eine Trefferwahrscheinlichkeit von 34% erforderlich. Man kann auch sagen, dass in ca. jedem dritten Ü-Ei ($\frac{1}{3} \approx 0{,}33$) ein Dino sein muss.

2. **Durch Wertetabelle und ablesen**

Funktion in y-Editor eingeben: $Y1 = 1 - binomcdf(10, X, 1)$

Da die Variable X eine Wahrscheinlichkeit ist liegt sie zwischen 0 und 1. Daher im Menu TBLSET kleine Schrittweisen z.B. 0.01 eingeben.

$TblStart = 0$, $\Delta TBL = 0.01$

X	Y_1
…	…
0.30	0.8506
0.31	0.8656
0.32	0.8793
0.33	0.8919
0.34	**0.9035**
0.35	0.9140

$\rightarrow x = 0.34$

3. Gezielte Bestimmung durch Schnitt von Graphen

Funktionen in y-Editor eingeben: $Y1 = 1 - binomcdf(10, X, 1)$

$Y2 = 0.9$

WINDOW einstellen: $x_{min} = 0$, $x_{max} = 1$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 1$

Intersect liefert $x = 0.3368 \rightarrow x \approx 0.34$

5. Glücksspiel und Wahrscheinlichkeit.

Alle Glücksspiele haben bestimmte Regeln:

- Wann gewinne ich, wann verliere ich?
- Wie viel Geld gewinne ich, wann gehe ich leer aus?
- Wie groß ist der Einsatz?

Beispiel 17

In einer Lotterie gewinnen 5% der Lose 15€, 10% der Lose 10€ und 15% der Lose 1€. Ein Los kostet 2,50€.

a. Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.
b. Der Veranstalter möchte seine Lotterie ohne „Gewinn und Verlust“ betreiben. Wie viel muss dann ein Los kosten?

Der **Erwartungswert** $\boldsymbol{E(X)}$ gibt an, wie viel **Gewinn der Spieler pro Spiel im Durchschnitt** macht.

$$\boldsymbol{Gewinn = Auszahlungsbetrag - Einsatz}$$

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) - Einsatz}$$

$\boldsymbol{x_i}$ gibt die **Gewinnbeträge** und $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ die zugehörige **Wahrscheinlichkeit** an.

Ist $E(X) > 0$ macht der Spieler Gewinn. Es ist für den Spieler **günstig** das Spiel zu spielen. Wenn $E(X) = 0$ ist handelt es sich um ein **faires Spiel**. Weder der Spieler noch der Spielbetreiber machen einen Gewinn oder einen Verlust. Wenn $E(X) < 0$ ist macht der Spieler Verlust. Es ist für den Spieler **ungünstig** das Spiel zu spielen.

Erwartungswert	Für den Spieler	Für den Spielbetreiber
$E(X) > 0$	günstig	ungünstig
$E(X) = 0$	fair	fair
$E(X) < 0$	ungünstig	günstig

a. Um den Erwartungswert zu bestimmen wird zunächst eine Tabelle angelegt. In dieser Tabelle sollten die Auszahlungsbeträge und deren Wahrscheinlichkeiten stehen.
Die Wahrscheinlichkeit für eine „Niete“ kann man ausrechnen in dem man die bereits gegebenen Wahrscheinlichkeiten von 1 bzw. die gegebenen Prozentsätze von 100% abzieht. Auch hier gilt wieder: Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1.

	5%	10%	15%	**70%**
Auszahlungs-betrag $\boldsymbol{x_i}$	15€	10€	1€	0€
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\boldsymbol{\frac{70}{100}}$

$E(X) = 15 \cdot \frac{5}{100} + 10 \cdot \frac{10}{100} + 1 \cdot \frac{15}{100} + 0 \cdot \frac{70}{100} - 2{,}5$

$E(X) = 0{,}75 + 1 + 0{,}15 + 0 - 2{,}5$

$E(X) = -0{,}6$

Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 0,60€.

Alternative Lösungsmöglichkeit

Man kann den Einsatz auch direkt von dem Auszahlungsbetrag abziehen. Dann bleibt in der Tabelle der Reingewinn des Spielers für das jeweilige Ereignis ablesen.

	5%	10%	15%	70%
Gewinn $\boldsymbol{x_i}$	$15€ - 2{,}50€$ $= \mathbf{12{,}50€}$	$10€ - 2{,}50€$ $= \mathbf{7{,}50€}$	$1€ - 2{,}50€$ $= \mathbf{-1{,}50€}$	$0€ - 2{,}50€$ $= \mathbf{-2{,}50€}$
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{70}{100}$

In manchen Aufgaben hat man auch bereits eine Tabelle gegeben. Man kann erkennen, ob der Einsatz bereits abgezogen wurde. In solchen Fällen gibt es negative Gewinnbeträge.

Der Erwartungswert kann man mit der Formel normal ausrechnen, allerdings wird jetzt kein Einsatz mehr abgezogen da dieser bereits mit dem Auszahlungsbetrag verrechnet wurde.

$$E(X) = 12{,}50 \cdot \frac{5}{100} + 7{,}50 \cdot \frac{10}{100} + (-1{,}50) \cdot \frac{15}{100} + (-2{,}50) \cdot \frac{70}{100}$$

$E(X) = 0{,}625 + 0{,}75 - 0{,}225 - 1{,}75$

$E(X) = -0{,}6$

Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 0,60€.

b. Der Veranstalter möchte das Spiel fair gestalten. Er kann das Erreichen in dem er den Einsatz verändert. Da der neue Einsatz unbekannt ist können nennen wir ihn einfach „b“. Der Ansatz (erste Tabelle) bleibt aber gleich:

$$E(X) = 15 \cdot \frac{5}{100} + 10 \cdot \frac{10}{100} + 1 \cdot \frac{15}{100} + 0 \cdot \frac{70}{100} - \boldsymbol{a}$$

„Fair“ bedeutet: $E(X) = 0$

$$0 = 15 \cdot \frac{5}{100} + 10 \cdot \frac{10}{100} + 1 \cdot \frac{15}{100} + 0 \cdot \frac{70}{100} - a$$

$$0 = 1{,}9 - a$$

$$a = 1{,}9$$

Wenn der Veranstalter 1,90€ pro Los verlangt ist das Spiel fair. Weder der Spieler noch der Veranstalter machen dann einen Gewinn oder Verlust.

Man kann aber auch begründen: Wenn der Erwartungswert ursprünglich $-0{,}6$ war bedeutet das, dass der Spieler 0,60€ Verlust pro Spiel macht. Wenn man das Los nun genau 0,60€ billiger macht bekommt man einen neuen Preis von $2{,}50€ - 0{,}60€ = 1{,}90€$.

Um ein Spiel fair zu gestalten muss man nicht immer den Einsatz verändern. Man kann auch entweder einen Auszahlungsbetrag oder eine Wahrscheinlichkeit ändern. Dabei kommt es aber darauf an was in der Aufgabe verlangt wird.