MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 2 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	**LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DAS FACH**
	Mathematik

Arbeitszeit	270 Minuten		
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.		
Stoffgebiet	**Teil 1:**	Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben)	S. 2 - 5
	Teil 2:	Analysis (1 Aufgabe)	S. 6
		Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben)	S. 7 - 9
	Teil 3:	Stochastik (2 Aufgaben)	S. 10 - 11
	Teil 4:	Vektorgeometrie (1 Aufgabe)	S. 12
		Matrizen (1 Aufgabe)	S. 13
Bemerkungen	**Lösungsvorschlag** **nur für die Fachlehrerin/den Fachlehrer bestimmt**		

Punkte

1 Analysis

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. 3

$f'(x) = \cos(2x)$

$f(0) = -1;\ \ f'(0) = 1$

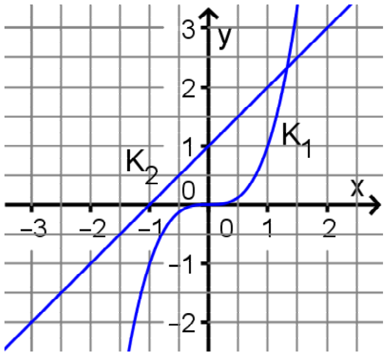
Gleichung der Tangente in P(0|–1): $y = x - 1$

1.2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Schnittstelle der Graphen der beiden Funktionen g_1 und g_2 mit 3

$g_1(x) = x^3$ und $g_2(x) = x + 1$

bestimmt werden. Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h. die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.

Skizze



1.3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text: 4

- $p(0) = 0$ K verläuft durch den Ursprung.
- $p''(-2) = 0$ K hat bei $x = -2$ eine Wendestelle.
- $p(-2) = 4$ K verläuft durch den Punkt P(–2 | 4).

Die Information über den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse hat Tina falsch interpretiert. Ihre vierte Bedingung würde gelten, wenn auch K die x-Achse im Punkt Q schneiden würde.

1.4 (A) < (C) < (B) 5

Im Intervall [0;3] schließt das Schaubild mit der x-Achse zwei Teilflächen ein, von denen diejenige unterhalb der x-Achse größer ist als die oberhalb der x-Achse. Daher ist (A) negativ.

Im Intervall [–1;1] schließt das Schaubild mit der x-Achse eine Fläche ein, die ganz oberhalb der x-Achse liegt. Daher ist (B) positiv. Der Flächeninhalt ist etwa 4 FE.

Im Intervall [–1;3,5] schließt das Schaubild mit der x-Achse drei Teilflächen ein. Zwei der Flächen sind gleich groß: eine liegt oberhalb, die andere unterhalb der x-Achse. Die dritte Teilfläche im Intervall [3;3,5] liegt oberhalb der x-Achse mit einem Flächeninhalt von ca. 1,5 FE. (C) liegt somit zwischen (A) und (B).

16

Punkte

2 Stochastik

2.1 In einer Urne sind 5 Kugeln mit der Aufschrift A und 5 Kugeln mit der Aufschrift B. Aus der Urne wird 3 Mal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen. 4

P(„Mindestens einmal tritt A ein") = $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

2.2 X: Anzahl von Kopf 3

$P(X = 1) = 100\cdot 0{,}5^{100}$; $P(X = 98) = \binom{100}{98}\cdot 0{,}5^{100}$

$\binom{100}{98} = \frac{100\cdot 99}{2} > 100$,

also ist $P(X = 1) < P(X = 98)$, die Aussage ist also wahr.

7

Punkte

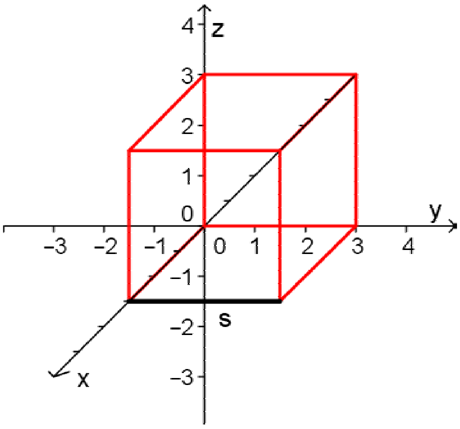
3 Vektorgeometrie

3.1 4

(A): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $u \in \mathbb{R}$.

(B): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $v \in \mathbb{R}$.

3.2 4



Beispiel:
Die Kante s liegt auf der Geraden mit der Gleichung

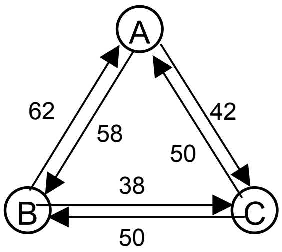
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

8

Punkte

4 Matrizen

4.1 4



In der Hauptdiagonale der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schickt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.

4.2 Bei (1) kann X ausgeklammert werden: $A \cdot X + X = (A + E) \cdot X$ 4

Bei (2) kann X nicht ausgeklammert werden, da X von links mit A und von rechts mit B multipliziert wird.

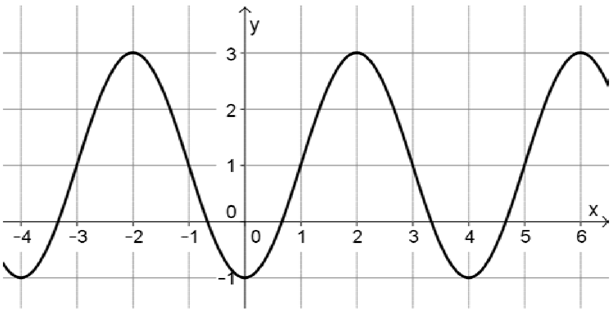
Wenn A + 2E nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen.

Eine mögliche Matrix dafür ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8

Punkte

1.1 Strecken in y-Richtung mit Faktor 2, 4
Strecken in x-Richtung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$,
Verschieben in y-Richtung um eine Längeneinheit (LE) und Verschieben in x-Richtung um eine LE.



3

1.2 $W_1(1|1)$, $W_2(3|1)$ 6

$f'(x) = \pi \cdot \cos(\frac{\pi}{2}(x-1))$

Verwendung von W_2: $f'(3) = \pi \cdot \cos(\pi) = -\pi$

$m_T = -\pi$ $\quad m_N = \frac{1}{\pi}$ $\quad$ Ursprungsgerade: $y = \frac{1}{\pi}x$

(oder $y = -\frac{1}{\pi}x$ bei W_1)

2.1 4
1. Richtig, da K_g die Asymptote mit der Gleichung y = 1 hat. Durch Integration wird daraus die Asymptote mit der Gleichung y = x.
2. Falsch, da dort ein Wendepunkt vorliegt.

2.2 Aus dem Schaubild liest man ab: 3
b = 1 (Asymptote)
g(0) = 3: $a + b = 3 \Rightarrow a = 2$

20

Punkte

2.1 Aus der Zeichnung liest man ab: 6

$$A(8) = 0,8$$
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-8 \cdot k} = 0,8$$
$$\Leftrightarrow 0,2 = e^{-8 \cdot k}$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{\ln(0,2)}{8} \approx 0,201$$

Die Materialkonstante hat etwa den Wert 0,2 cm^{-1}.

Wanddicke d:

$$A(d) = 0,99$$
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-k \cdot d} = 0,99$$
$$\Leftrightarrow d = -\frac{\ln(0,01)}{k} = \frac{8 \cdot \ln(0,01)}{\ln(0,2)} \approx 22,89$$

Die Wanddicke muss etwa 23 cm betragen.

2.2 Beide Platten absorbieren gleich stark: 4

$$1 - e^{-0,15 \cdot d} = 1 - e^{-1,62 \cdot 5}$$
$$\Leftrightarrow \quad -0,15 \cdot d = -8,1$$
$$\Leftrightarrow \quad d = 54$$

Man benötigt eine 54 cm dicke Aluminiumplatte, um die gleiche Absorption zu erreichen. Falls Aluminiumplatten mit der Dicke 5 cm verwendet werden, sind 11 Aluminiumplatten erforderlich.

Diese 11 Aluminiumplatten haben die Masse 133,43 kg und kosten $133,43 \cdot 1,50\,€ \approx 200,15\,€$.

Die Bleiplatte kostet $51 \cdot 1,60\,€ = 81,60\,€$.

Die Aluminiumabschirmung ist mehr als doppelt so teuer.

10

Punkte

3.1 Der Funktionsterm $p(x) = 60 - 2{,}4 \cdot t$ kann die zeitliche Entwicklung des Auktionspreises nicht korrekt beschreiben, da bei diesem Term der Auktionspreis täglich um 4 % bezogen auf den Startpreis sinkt und nicht, wie in der Strategie des Händlers gefordert, um 4 % bezogen auf den Preis des Vortags abnimmt. 6
Der Funktionsterm $p(t) = 60 \cdot e^{\ln(0{,}96) \cdot t} = 60 \cdot (1 - 0{,}04)^t$ beschreibt das zeitliche Verhalten des Auktionspreises korrekt.

Kein Verlust: $p(t) \geq 30$

$\Leftrightarrow\ 60 \cdot e^{\ln(0{,}96)t} \geq 30$

$\Leftrightarrow\ e^{\ln(0{,}96)t} \geq 0{,}5$

$\Leftrightarrow\ t \leq \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$

Spätestens am 17. Auktionstag (Auktionsstart: t = 0) muss die Giraffe verkauft sein, falls der Händler keinen Verlust erleiden möchte.

3.2 Verlust am 50. Auktionstag, d.h., t = 49. Also darf es für t = 48 weder Gewinn noch Verlust geben. 4
q: Prozentsatz

$p(48) = 60 \cdot e^{\ln(1-q) \cdot 48} = 30$

$\Rightarrow (1-q)^{48} = 0{,}5$

$\Rightarrow 1 - q = \sqrt[48]{0{,}5} = 0{,}5^{\frac{1}{48}}$

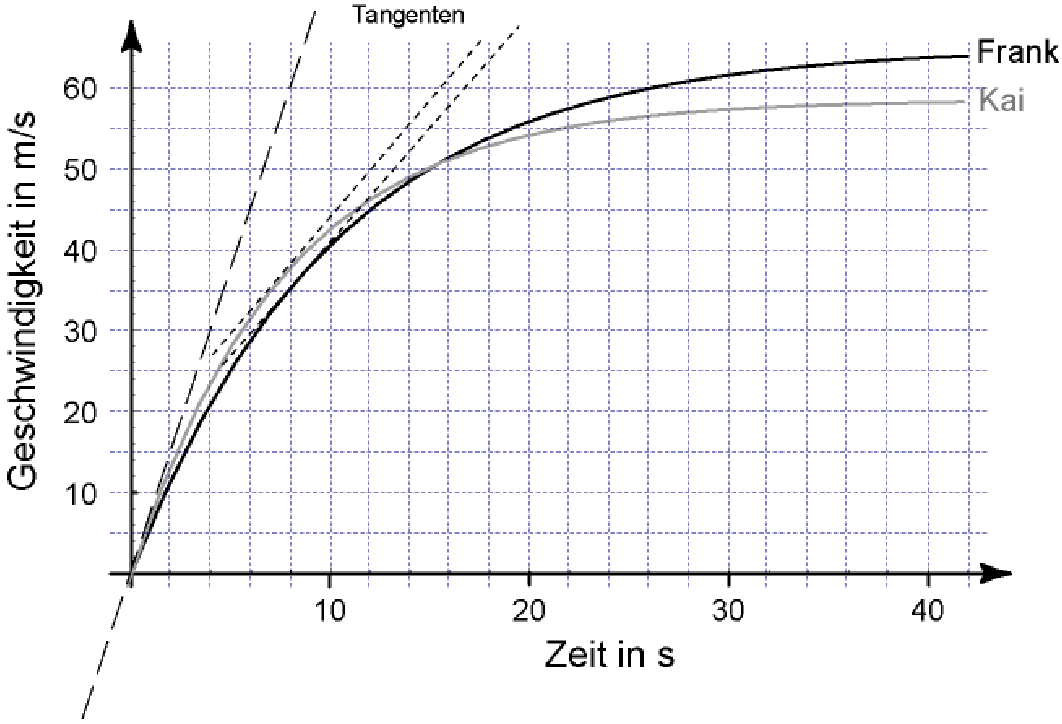
$\Rightarrow q \approx 0{,}0143$

Der Prozentsatz muss etwa 1,43 % betragen.

10

Punkte

4.1 Frank erfährt die maximale Beschleunigung während des Starts: 4



Die Tangente im Ursprung hat etwa die Steigung $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.

Damit beträgt die maximale Beschleunigung etwa 7,5 $\frac{m}{s^2}$.

Frank und Kai beschleunigen bei etwa t = 8 Sekunden gleich stark, da zu diesem Zeitpunkt beide Kurven parallel verlaufen.

4.2 Franks zurückgelegte Wegstrecke: 6

$$s = \int_0^{40} v(t)\,dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-0{,}098 \cdot t} + 65t\right]_0^{40} \approx 1949{,}9$$

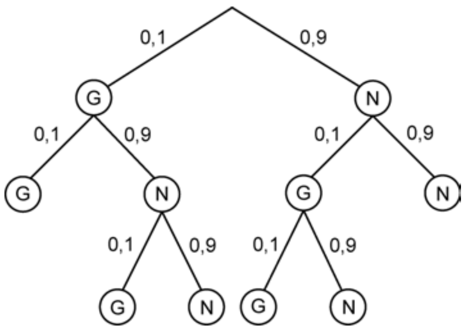
Frank hat nach 40 Sekunden etwa 1950 Meter zurückgelegt.

Frank liegt nach 40 Sekunden vor Kai. Da Franks Geschwindigkeit größer ist als Kais Geschwindigkeit, wird er das Rennen gewinnen.

10

Punkte

1.1 G: 100 € Gewinn 4
N: Niete



1.2 G: Gewinn 4

$$P(G=100)=2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=0{,}162$$

$$P(G=200)=\left(\frac{1}{10}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{9}{10}=0{,}028$$

Damit: $E(G)=0{,}162\cdot 100\,€+0{,}028\cdot 200\,€=21{,}80\,€$

Die Teilnahmegebühr muss 21,80 € betragen, damit das Spiel fair ist.

1.3 A: Mindestens ein Gewinn von 100 €. 3
B: Genau drei Drehungen bis Spielende.

$$P(A)=0{,}1^2+2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9+2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}19$$

$$P(B)=1-(0{,}1^2+0{,}9^2)=0{,}18$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\approx 0{,}947$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.

1.4 C: In einem Spiel genau 200 € gewonnen. 4

$$P(C)=0{,}1^2+2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}028$$

D: Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal 200 € gewonnen.

$$P(D)=1-\sum_{k=0}^{10}\binom{180}{k}\cdot 0{,}028^k\cdot 0{,}972^{180-k}\approx 0{,}013$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 Spielen mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden, beträgt etwa 1,3 %.

15

Punkte

2.1 A: Kunde nimmt das Angebot „Wintercheck“ an. 5
B: Kunde nimmt das Angebot „Reifenwechsel“ an.

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	**0,3**
$\overline{B}$	0,42	**0,28**	0,7
	0,6	0,4	**1**

C: Kunde nimmt beide Angebote wahr.
$P(C) = P(A \cap B) = 0{,}18$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot.
$P(D) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}54$

2.2 X: Umsatz 4
n: Anzahl täglicher Kunden

$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0{,}6 + 9 \cdot n \cdot 0{,}3 = 800$
$\Rightarrow n = 56{,}7...$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

2.3 Schätzer für p: $\frac{85}{1000} = 8{,}5\,\%$ 6

95 %-Vertrauensintervall:

$$0{,}085 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}} \le p \le 0{,}085 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}}$$

Also $7{,}62\,\% \le p \le 9{,}38\%$.

15

Punkte

Vektorgeometrie:

1.1 d: Abstand E zum Ursprung. 3

$$d = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+4+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0{,}267$$

Der Abstand der Ebene E zum Ursprung beträgt etwa 0,3 LE.

1.2 Schnitt von g und E: 6

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$$

Die Gleichung hat genau eine Lösung. Die Ebene E und die Gerade g schneiden sich in dem Punkt D(1|1|–2).

Berechnung des Schnittwinkels:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{28}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 34{,}54°$$

1.3 Der Richtungsvektor von g ist gleichzeitig der Normalenvektor von F. 6

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Ebene F verläuft parallel zur x_1-Achse.

Zwei Ebenen können parallel zueinander liegen, identisch sein oder sich in einer Geraden schneiden. Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden, wenn ihre Normalenvektoren keine Vielfachen voneinander sind.
Die beiden Normalenvektoren lauten:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

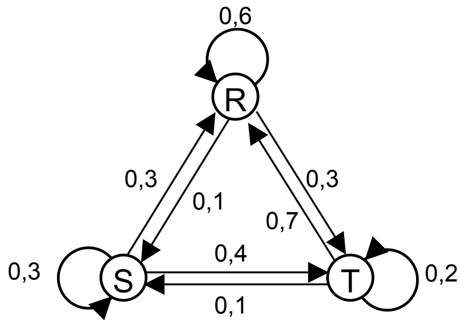
Also schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

15

Punkte

Matrizen:

1.1 4



1.2 5

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ a \\ 0,7 - a \end{pmatrix} \qquad \vec{y}_2 = A \cdot \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0,67 - 0,4a \\ 0,10 + 0,2a \\ 0,23 + 0,2a \end{pmatrix}$$

WS für einen sonnigen Tag: $0,1 + 0,2a > a \;\Leftrightarrow\; a < 0,125$
WS für einen trüben Tag: $0,7 - a > 0,575$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag muss kleiner sein als 12,5 % und die für trübes Wetter muss größer sein als 57,5 %.

1.3 $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \;\Leftrightarrow\; (E - A) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ 6

$$\text{LGS: } \left(\begin{array}{ccc|c} 0,4 & -0,3 & -0,7 & 0 \\ -0,1 & 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,3 & -0,4 & 0,8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2,08\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0,44\,\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen: $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2,08 \\ 0,44 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung ist diejenige Lösung, bei der die Komponenten die Summe 1 haben:
$3,52\,\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \approx 0,284$

15